

УДК 621.762.047

Мироненко Е. В.  
Грибков Э. П.  
Данилюк В. А.

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПРИ РЕАЛИЗАЦИИ ПРОЦЕССА ПРОКАТКИ ДВУХСЛОЙНЫХ ПОРОШКОВЫХ ЛЕНТ

Одной из наиболее распространенных технологий изготовления порошковых лент является технология, заключающаяся в прокатке нескольких слоев порошкового сердечника в металлической оболочке. Такой способ позволяет получать порошковые сердечники с большей плотностью упаковки частиц. Рекомендации по технологическим режимам производства данной технологии основаны на эмпирических данных. Существующие модели напряженно-деформированного состояния при прокатке порошков разработаны для однослойных композиций [1] и двухслойных [2], один слой из которых представляет монометаллическую ленту. Наличие второго слоя порошковой композиции существенно видоизменяет геометрические характеристики и условия протекания деформации при прокатке. Отмеченное делает актуальным дальнейшее развитие математических моделей, позволяющих определить количественные характеристики основных параметров процессов производства порошковых лент.

Целью работы является развитие математического аппарата для определения локальных характеристик основных параметров порошковой ленты в очаге деформации.

В основу рассматриваемой численной одномерной математической модели процесса прокатки двухслойных порошковых материалов была положена математическая модель процесса прокатки однослойных порошковых материалов [3]. Используемая в этом случае расчетная схема интегрального очага деформации представлена на рис. 1.

Разбиение зоны уплотнения на конечное множество элементарных объемов и определение геометрических характеристик, а также напряжений  $\sigma_x$ ,  $\tau_x$  и  $P_x$  в конечно-разностной форме (рис. 1, б) было осуществлено по аналогии с методикой, изложенной в работе [3].

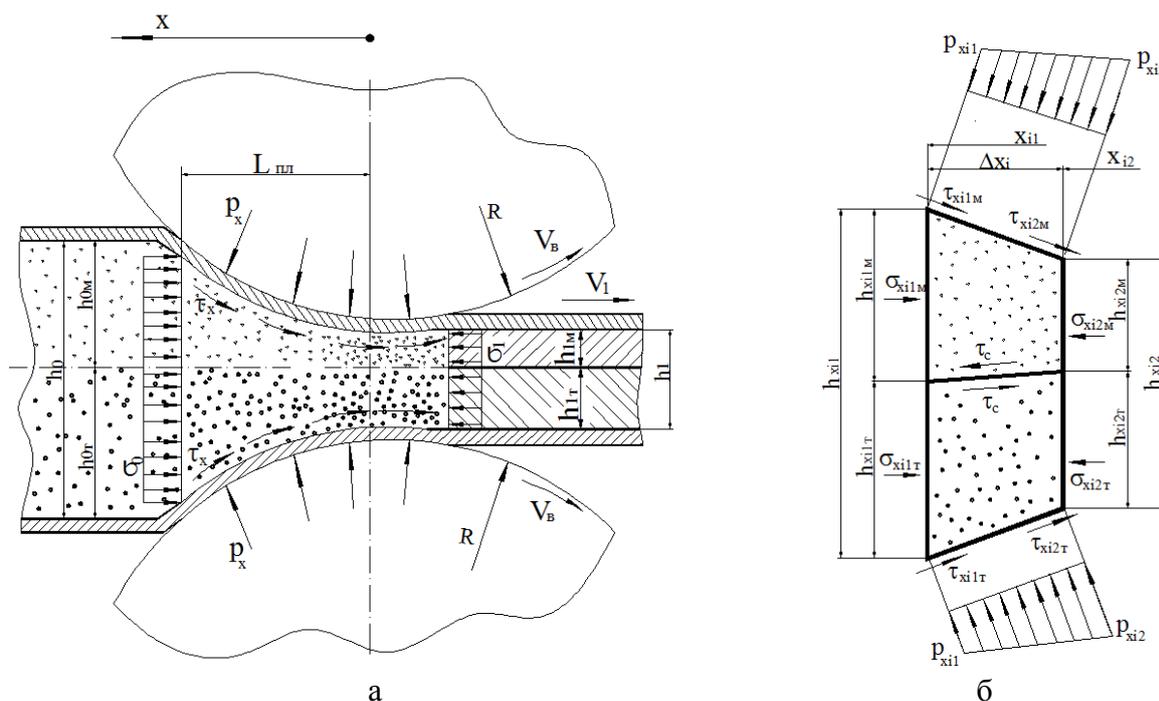


Рис. 1. Расчетная схема интегрального очага деформации (а) и выделенного элементарного объема очага деформации (б)

Вместе с тем следует отметить, что наличие трения между слоями несколько видоизменяет условие статического равновесия выделенного элементарного объема очага деформации (рис. 1, б), имеющего следующий вид:

– для менее пластичной составляющей:

$$\begin{aligned} \sum F_{xim} = & \sigma_{xi2m} h_{xi2m} - \sigma_{xi1m} h_{xi1m} - 0.5 \Delta x_i (P_{xi1m} f_{xi21} + P_{xi2m} f_{xi22}) - \\ & - 0.5 (P_{xi1m} + P_{xi2m}) \Delta x_i f_{ci} + 0.25 (P_{xi1m} + P_{xi2m}) (h_{xi1} - h_{xi2}) - \\ & - 0.5 (P_{xi1m} + P_{xi2m}) (h_{xi1m} - h_{xi2m} - (h_{xi1} - h_{xi2}) / 2) = 0; \end{aligned} \quad (1)$$

– для более пластичной составляющей:

$$\begin{aligned} \sum F_{xim} = & \sigma_{xi2m} h_{xi2m} - \sigma_{xi1m} h_{xi1m} - 0.5 \Delta x_i (P_{xi1m} f_{xi11} + P_{xi2m} f_{xi12}) - \\ & - 0.5 (P_{xi1m} + P_{xi2m}) \Delta x_i f_{ci} + 0.25 (P_{xi1m} + P_{xi2m}) (h_{xi1} - h_{xi2}) = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $h_{xi1m(m)}$ ,  $h_{xi2m(m)}$  – текущая толщина более (менее) прочной составляющей на входе и на выходе из выделенного элементарного объема соответственно;

$h_{xi1}$ ,  $h_{xi2}$  – текущая толщина всей композиции на входе и на выходе из выделенного элементарного объема соответственно;

$\Delta x_i$  – протяженность выделенного элементарного объема очага деформации;

$f_{xi1(2)}$ ,  $f_{xi2(2)}$  – текущие значения коэффициентов трения на входе и на выходе из выделенного элементарного объема соответственно;

$f_{ci}$  – текущее значение коэффициента трения между слоями композиции;

$P_{xi1m(m)}$ ,  $P_{xi2m(m)}$  – текущие значения нормальных контактных напряжений на входе и на выходе из выделенного элементарного объема соответственно;

$\sigma_{xi1m(m)}$ ,  $\sigma_{xi2m(m)}$  – текущие значения нормальных напряжений на входе и на выходе из выделенного элементарного объема соответственно.

Подставляя в уравнение статического равновесия условие пластичности для сыпучих сред [4]:

$$\sigma_x = \frac{1 - 2\alpha_x}{1 + 4\alpha_x} P_x - \sqrt{P_x^2 \left[ \left( \frac{1 - 2\alpha_x}{1 + 4\alpha_x} \right)^2 - 1 \right] + \frac{4}{3} \frac{1 + \alpha_x}{1 + 4\alpha_x} \beta_x \sigma_{sx}^2}, \quad (3)$$

можно определить нормальные контактные напряжения:

$$P_{xi2}^2 (t_{1vm(m)}^2 - t_{3im(m)}) + 2P_{xi2} t_{i1m(m)} t_{i2m(m)} + t_{i2m(m)}^2 - t_{i4m(m)} = 0, \quad (4)$$

где для менее пластичной составляющей:

$$t_{i1m} = \frac{1 - 2\alpha_{xi2m}}{1 + 4\alpha_{xi2m}} h_{xi2m} + \frac{1}{2} (\Delta h_{xim} - f_{xi22} \Delta x_i + f_{ci} \Delta x_i);$$

$$t_{i2m} = 0.5 P_{xi1} (\Delta h_{xim} - \Delta x_i f_{xi21} + f_{ci} \Delta x_i) - \sigma_{xi1m} h_{xi1m};$$

$$t_{i3m} = h_{xi2m}^2 \left[ \left( \frac{1 - 2\alpha_{xi2m}}{1 + 4\alpha_{xi2m}} \right)^2 - 1 \right];$$

$$t_{i4m} = \frac{4}{3} h_{xi2m}^2 \frac{1 + \alpha_{xi2m}}{1 + 4\alpha_{xi2m}} \beta_{xi2m} \sigma_{sxi2m}^2; \quad (5)$$

– для более пластичной составляющей:

$$\begin{aligned}
t_{i1,m} &= \frac{1-2\alpha_{xi2,m}}{1+4\alpha_{xi2,m}} h_{xi2,m} + \frac{1}{2} (\Delta h_{xim} - f_{xi12} \Delta x_i - f_{ci} \Delta x_i); \\
t_{i2,m} &= 0.5 P_{x1} (\Delta h_{xim} - \Delta x_i f_{xi11} - f_{ci} \Delta x_i) - \sigma_{xi1,m} h_{xi1,m}; \\
t_{i3,m} &= h_{xi2,m}^2 \left[ \left( \frac{(1-2\alpha_{xi2,m})}{(1+4\alpha_{xi2,m})} \right)^2 - 1 \right]; \\
t_{i4,m} &= \frac{4}{3} h_{xi2,m}^2 \left[ \frac{(1+\alpha_{xi2,m})}{(1+4\alpha_{xi2,m})} \right] \beta_{xi2,m} \sigma_{sxi2,m}^2, \quad (6)
\end{aligned}$$

где  $\alpha_{xi}$ ,  $\beta_{xi}$  – коэффициенты, характеризующие механические свойства порошковых материалов различного состава в зависимости от значения относительной плотности;  
 $\sigma_{sxi}$  – предел текучести твердой фазы порошковой композиции;

$$\Delta h_{xim(m)} = h_{xi1m(m)} - h_{xi2m(m)}.$$

В качестве начальных условий, то есть геометрических характеристик для первого элементарного объема, принимали следующие:

$$h_{xi1,m}|_{i=1} = h_{x0,m}; h_{x1,m}|_{i=1} = h_{x0,m}; h_{x2,m} = h_{x1,m} h_{x2} / h_{x1}; h_{x2,m} = h_{x2} - h_{x2,m}. \quad (7)$$

Конечную толщину первого слоя  $h_{x2,m}$  определяли из условия равенства нормальных контактных напряжений между слоями:

$$h_{xi2,m} = h_{xi2,m} + A_s \operatorname{sign}\{P_{xi2,m} - P_{xi2,m}\}, \quad (8)$$

где  $A_s$  – шаг изменения толщины слоя, величина которого в зависимости от степени приближения к исходному результату была принята переменной;

$\operatorname{sign}\{P_{xi2,m} - P_{xi2,m}\}$  – градиентная оценка направления приращения:

$$\operatorname{sign}\{P_{xi2,m} - P_{xi2,m}\} = \begin{cases} 1 & \text{при } P_{xi2,m} > P_{xi2,m}; \\ 0 & \text{при } P_{xi2,m} \approx P_{xi2,m}; \\ -1 & \text{при } P_{xi2,m} < P_{xi2,m}. \end{cases} \quad (9)$$

Помимо определения текущих толщин составляющих порошковой ленты необходимо также определение текущего значения относительной плотности порошка. Для этого, воспользовавшись зависимостями между главными скоростями пластической деформации  $\dot{\varepsilon}_1$ ,  $\dot{\varepsilon}_3$  и главными напряжениями  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  предоставляемыми теорией течения пористых материалов и исходя из условия сохранения массы, результирующее в рамках данного объема значение относительной плотности порошковой среды может быть определено как:

$$\gamma_{xi2} = \gamma_{xi1} h_{xnn1} / [h_{xnn2} (1 + \varepsilon_{lxnx2})], \quad (10)$$

$$\text{где } \varepsilon_{lxnx2} = \frac{\sigma_{xnn2} (1 + 4\alpha_{xin2}) - p_{xi2} (1 - 2\alpha_{xnn2})}{p_{xi2} (1 + 4\alpha_{xin2}) - \sigma_{xnn2} (1 - 2\alpha_{xnn2})} \cdot \frac{h_{xnn1} - h_{xnn2}}{h_{xnn1}}.$$

В качестве векторной направленности используемой рекуррентной схемы решения принимали направление, соответствующее направлению движения прокатываемой композиции, а в качестве условий связи при переходе от  $i$ -го к  $(i+1)$  элементарному объему использовали следующие условия:

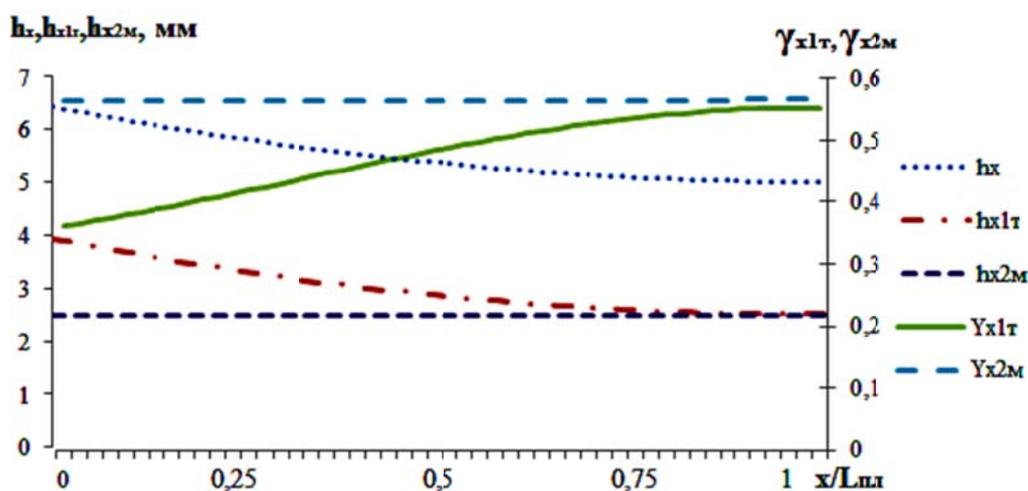
$$\begin{aligned}
x_{(i+1)} &= x_{i2}; h_{x(i+1)} = h_{xi2}; h_{xn(i+1)} = h_{xnn2}; h_{xm(i+1)} = h_{xmm2}; f_{xm(i+1)} = f_{xmm2}; \\
f_{xn(i+1),m} &= f_{xni,m}; \gamma_{x(i+1)} = \gamma_{xi2}; p_{x(i+1)} \approx p_{xnn2} \approx p_{xmm2}; \\
\sigma_{xn(i+1)} &= \sigma_{xnn2}; \sigma_{xm(i+1)} = \sigma_{xmm2}, \quad (11)
\end{aligned}$$

где начальные условия, т. е. геометрические и силовые характеристики для первого элементарного объема соответствовали:

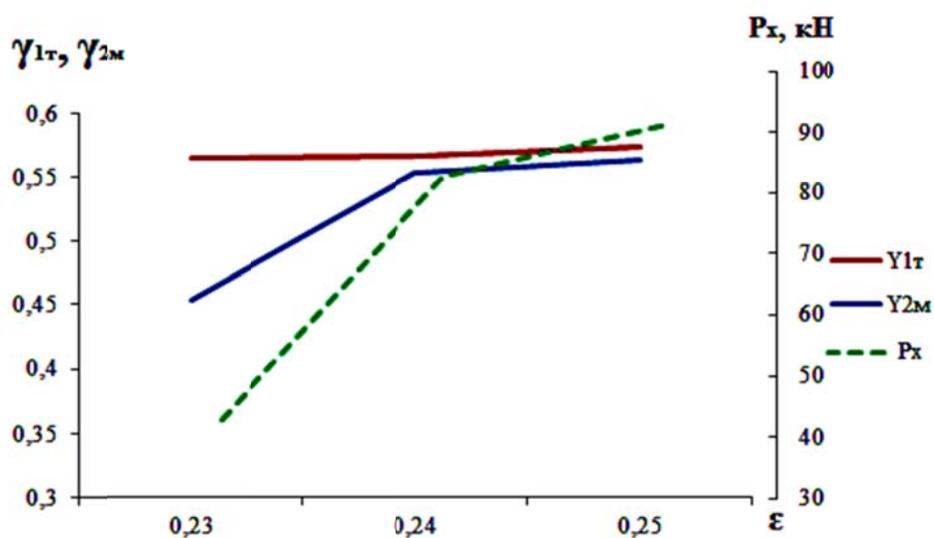
$$\begin{aligned} x_{1i|i=1} &= l_{nl}; h_{x1i|i=1} = h_0; h_{xn1i|i=1} = h_{0n}; h_{xm1i|i=1} = h_{0m}; f_{xm1i|i=1} = f_{0n}; \\ f_{xn\ m1i|i=1} &= f_{0n\ m}; \gamma_{x1i|i=1} = \gamma_{x0}; \sigma_{xn1i|i=1} = \sigma_{0n}; \sigma_{xm1i|i=1} = \sigma_{0m}; p_{x1i|i=1} = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

В целом, рассмотренные аналитические решения наряду с итерационной процедурой определения протяженности очага деформации, учетом упругого сплющивания поверхности рабочих валков, процедурой численного интегрирования основных показателей процесса составили полный алгоритм по численному одномерному математическому моделированию напряженно-деформированного состояния при прокатке двухслойных порошковых материалов.

В качестве примера результата численной реализации программных средств, разработанных на основе полученной математической модели, на рис. 2 представлены расчетные распределения толщин и относительных плотностей слоев и ленты по длине очага деформации (рис. 2, а) и распределения относительных плотностей слоев и силы прокатки в зависимости от обжатия (рис. 2, б).



а



б

Рис. 2. Расчетные распределения толщин и относительных плотностей слоев и ленты по длине очага деформации (а) и распределения относительных плотностей слоев и силы прокатки в зависимости от обжатия (б) процесса прокатки двухслойной порошковой ленты

Расчеты выполнены для прокатки железного порошка марки ПЖРЗ с относительной плотностью 0,365 и слоя медного порошка с относительной плотностью 0,565 в валках диаметром 260 мм со скоростью прокатки 0,03 м/с (толщина первого слоя – 4 мм, второго – 2,5 мм).

Из анализа представленных расчетных распределений видно, что при прокатке двухслойной порошковой ленты происходит значительное уменьшение слоя медного порошка, однако железный слой уменьшается по толщине только на выходе из очага деформации. Общая толщина ленты в процессе прокатки интенсивно снижается практически по всей длине очага деформации. Также имеет место интенсивный рост конечной относительной плотности менее пластичного слоя материала и стабилизация роста на выходе из зоны деформации конечной относительной плотности второго слоя порошковой композиции, которая составляет 1–2 %. Проведенные дополнительные расчеты показывают, что при меньшем обжатии плотность первого слоя не достигает плотности второго слоя. При увеличении обжатия второй слой начинает деформироваться и, в итоге, оба слоя имеют разную плотность. Это свидетельствует о целесообразности решения оптимизационных задач по выбору режимов обжатия.

### ВЫВОДЫ

Разработанная математическая модель напряженно-деформированного состояния и геометрических характеристик при реализации процесса прокатки двухслойной порошковой ленты, в которой более полно учтены процессы взаимодействия между слоями, позволяет с большей точностью спрогнозировать энергосиловые параметры, геометрические и физико-механические характеристики при прокатке двухслойных порошковых композиций. Также полученная математическая модель позволяет решать оптимизационные задачи по выбору рациональных режимов обжатий при прокатке двухслойных порошковых лент.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Напряженное состояние и кинематика при прокатке порошковых материалов на металлической подложке* / В. Ф. Потапкин, А. М. Левкин, А. В. Сатонин, Э. П. Грибков // *Порошковая металлургия*. – 2000. – №1/2. – С. 13–21.
2. *Грибков Э. П. Напряженно-деформированное состояние при прокатке двухслойных порошковых материалов, один слой из которых является монометаллом* / Э. П. Грибков, А. М. Кулик // *Удосконалення процесів та обладнання обробки тиском у металургії та машинобудуванні* : зб. наук. праць. – Краматорськ-Слов'янськ : ДДМА, 2000. – С. 138–141.
3. *Математическая модель процесса прокатки порошковой ленты с учётом пластической деформации оболочки* / В. Д. Кассов, С. В. Малыгина, Э. П. Грибков, В. А. Данилюк // *Обработка материалов давлением : сборник научных трудов*. – Краматорск : ДГМА, 2011. – № 2 (27). – С. 47–52.
4. *Прогрессивные технологические процессы штамповки деталей из порошков и оборудование* / Г. М. Волкогон, А. М. Дмитриев, Е. П. Добряков и др.; под общ. ред. А. М. Дмитриева, А. Г. Овчинникова. – М. : Машиностроение, 1991. – 320 с.

Мироненко Е. В. – д-р техн. наук, проф., зав. кафедрой менеджмента ДГМА;

Грибков Э. П. – канд. техн. наук, доц. кафедры АММ ДГМА;

Данилюк В. А. – аспирант ДГМА.

ДГМА – Донбасская государственная машиностроительная академия, г. Краматорск.

E-mail: amm@dgma.donetsk.ua

Статья поступила в редакцию 16.01.2012 г.